

# PROPAGAÇÃO DA VELOCIDADE DE ROTAÇÃO DE SATÉLITES ESTABILIZADOS POR ROTAÇÃO COM TORQUE INDUZIDO.

Anderson José Pereira, Maria Cecília Zanardi, Fernanda Almeida de Toledo. – Inter-áreas – Engenharia Aeroespacial – Curso de Licenciatura em Física - Departamento de Matemática – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – Campus de Guaratinguetá

O objetivo deste trabalho é a implementação numérica da solução analítica para a equação do movimento relacionada com o módulo da velocidade de rotação do satélite, quando a influência do torque magnético devido às correntes de Foucault ( torque induzido) é considerada. O satélite é estabilizado por rotação e encontra-se em órbita circular. As coordenadas que descrevem a atitude de um satélite estabilizado por rotação são:  $\alpha$  - ângulo que a projeção do eixo de rotação  $\hat{k}$  no plano inercial OXY forma com o eixo OX;  $\delta$  - ângulo que o eixo de rotação  $\hat{k}$  forma com o eixo inercial OZ. As equações do movimento de satélites estabilizados por rotação são descritas em termos do módulo da velocidade de rotação (W), da ascensão reta ( $\alpha$ ) e da declinação do eixo de rotação do satélite ( $\delta$ ), e dependem dos componentes dos torques externos atuantes no satélite, expressos em um sistema fixo no satélite. As soluções analíticas determinadas para a velocidade de rotação do satélite foram implementadas numericamente e comparadas com resultados reais dos satélites de coletas de dados brasileiros (SCD1 e SCD2) e são úteis para a análise das missões destes satélites. As parcelas do torque devido às correntes de Foucault foram determinadas em trabalhos anteriores (FRANÇA, 2006; TOLEDO, 2005). As implementações numéricas foram realizadas com o software MATLAB.

Um satélite estabilizado por rotação possui o eixo de rotação alinhado com o eixo de maior momento principal de inércia (neste caso o eixo Oz do sistema do satélite), de modo que o momento angular  $\vec{L}$  é expresso por:

$$\vec{L} = I_z W \hat{k}, \quad (1)$$

em que  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos principais de inércia do satélite. Seja o torque externo atuante no satélite:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = N_x \hat{i} + N_y \hat{j} + N_z \hat{k} \quad (2)$$

sendo as parcelas  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  associadas com o torque magnético induzido e obtidas a partir de

$$\vec{N}_i = p \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{W}), \quad (3)$$

onde  $p$  é o parâmetro de Foucault,  $\vec{B}$  vetor campo geomagnético e  $\vec{W}$  é o vetor velocidade de rotação. Considerando o satélite estabilizado por rotação, as componentes do torque magnético induzido instantâneo são dadas por:

$$N_x = -pW(B_x B_y) \quad (4),$$

$$N_y = -pW(B_y B_z) \quad (5) \text{ e}$$

$$N_z = pW[(B_x)^2 + (B_y)^2] \quad (6).$$

O eixo de rotação  $\hat{k}$  é definido pela ascensão reta  $\alpha$  e pela declinação  $\delta$ , sendo que as equações de Euler que descrevem o movimento de atitude do satélite são dadas por Kuga (1987):

$$\dot{W} = \frac{1}{I_z} N_z \quad (7), \quad \dot{\delta} = \frac{1}{I_z W} N_y \quad (8) \quad \text{e} \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{I_z W \cos \delta} N_x \quad (9)$$

em que;  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  são os componentes dos torques externos no sistema do satélite,  $I_z$  é o momento de inércia relacionado ao eixo Oz,  $W$  é a velocidade de rotação e  $\delta$  é a declinação do eixo de rotação. Neste trabalho é considerado que o único torque atuante no satélite é o torque magnético induzido. Os componentes médios deste torque, ao longo de um período orbital, são introduzidos nas equações do movimento (7) a (9). Os componentes médios do torque magnético devido às correntes de Foucault foram determinados para um período orbital (TOLEDO,2005; FRANÇA,2006), e dados por:

$$\vec{N}_m = N_{xm} \hat{i} + N_{ym} \hat{j} + N_{zm} \hat{k}, \quad (10)$$

em que cada parcela depende de  $W$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $p$ , dos coeficientes Gaussianos, distância geocêntrica, do raio equatorial da Terra, dos elementos orbitais e longitude geográfica. Estes componentes estão associados com centenas de parcelas, estando disponíveis com os autores. O único componente do torque que afeta a velocidade de rotação é o componente no eixo Oz. Com os componentes médios do torque magnético devido às correntes de Foucault, as equações do movimento são expressas por:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{N_{zm}}{I_z} \quad (11), \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{I_z W} N_{ym} \quad (12) \text{ e } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{N_{xm}}{I_z W \cos \delta} \quad (13).$$

Aqui é analisada apenas a influência do torque magnético induzido no módulo da velocidade de rotação do satélite. A integração da equação é realizada através do método de aproximações sucessivas até a primeira ordem, considerando que os elementos orbitais e a ascensão reta e declinação do eixo de rotação permanecem constantes durante um período orbital. Deste modo, a solução analítica determinada é válida para um período orbital (TOLEDO,2005). A partir da equação (11), tem-se:

$$\frac{dW}{dt} = kW, \quad (14)$$

com:  $k = \frac{N_{zm}^*}{I_z} \quad (15) \quad \text{e} \quad N_{zm}^* = \frac{N_{zm}}{W} \quad (16),$

com  $k$  dependendo dos valores iniciais de  $\alpha, \delta, I, a, \bar{\theta}, \Omega$ . Integrando a equação (14), obtém-se:

$$W = W_0 e^{kt} \quad (17)$$

em que  $W_0$  é a velocidade de rotação inicial no tempo  $t=0$ . Logo, se  $k < 0$ , o módulo da velocidade decai exponencialmente com o tempo. A solução apresentada para a magnitude da velocidade angular de rotação é válida para um período orbital. A cada período orbital, os dados orbitais devem ser adequados, levando em consideração as principais influências do achatamento da Terra, sendo que aqui foi considerada a variação linear associada com a longitude do nodo ascendente da órbita. No entanto, na propagação da velocidade de rotação aqui realizada, os valores da ascensão reta e declinação foram mantidos constantes durante 24 horas e só atualizados diariamente junto com demais elementos orbitais através dos dados fornecidos pelo CCS/INPE.

As condições iniciais para o satélite SCD1 de atitude foram tomados para a data de 7 de agosto de 1993 às 00:00:00 GMT, fornecidos pelo CCS. A velocidade de rotação foi atualizada pela teoria aqui desenvolvida a cada período orbital dentro do propagador de velocidade desenvolvido, juntamente com a longitude do nodo ascendente fornecida pelo CCS, considerando as principais influências do achatamento da Terra. Essa abordagem é coerente com a operação do CCS onde o sistema de determinação de órbita opera independentemente do sistema de determinação de atitude, e fornece dados orbitais para posterior previsão de atitude. No entanto, tanto os elementos orbitais como módulo da velocidade de rotação, ascensão reta e declinação do eixo de rotação foram atualizadas diariamente no propagador de atitude desenvolvido. A Tabela 1 apresenta o valor da velocidade de rotação  $W$  fornecida pelo CCS, e os valores calculados pela presente teoria (índice c), bem como os respectivos desvios às 00 horas de cada dia.

**Tabela 1** – Valores de W fornecidos pelo CCS, valores calculados e os correspondentes desvios encontrados para o SCD1.

DATA	Wc(rpm)	Winpe(rpm)	Wc-Winpe
07/08/1993	88.97	88.97	-0.76
08/08/1993	88.74	88.79	-0.05
09/08/1993	89.10	88.59	0.51
10/08/1993	89.19	88.41	0.78
11/08/1993	89.22	89.22	0.00
12/08/1993	88.61	88.03	0.58
13/08/1993	88.07	87.85	0.22
14/08/1993	87.53	87.61	-0.08
15/08/1993	86.92	87.42	-0.50
16/08/1993	86.61	87.24	-0.63
17/08/1993	86.44	87.06	-0.62
18/08/1993	86.37	86.88	-0.51
19/08/1993	86.35	86.71	-0.36
20/08/1993	86.37	86.54	-0.17
21/08/1993	86.38	86.37	0.01
22/08/1993	86.36	86.21	0.15

De acordo com os resultados, em comparação com os dados fornecidos pelo CCS, nota-se que o erro médio da velocidade angular foi de 0,00623 rpm, durante os 15 dias de teste. A velocidade angular decaiu de 2,6 rpm neste período. Ainda assim, estes erros são satisfatórios e compatíveis com as precisões requeridas para a missão. As condições iniciais para SCD2 foram tomadas na data de 01 de fevereiro de 2002 às 00:00:00 GMT. Analogamente ao SCD1, somente a longitude do nodo ascendente fornecido pelo CCS foi atualizado a cada período orbital juntamente com a velocidade de rotação, e tanto o elemento orbital quanto as variáveis de atitude foram atualizadas diariamente dentro do propagador de atitude desenvolvido. No período de 11 dias considerado, houve apenas uma atuação do controle de atitude. A Tabela 2 apresenta às 00 horas de cada dia, o valor da variável da velocidade W fornecida pelo CCS, e os valores calculados pela presente teoria (índice c), bem como os respectivos desvios.

Neste caso, comparado com os dados do CCS, nota-se que o erro médio e o desvio padrão da velocidade angular foi de 0.03 rpm e 0.04 rpm respectivamente, durante o período de teste. Neste caso a velocidade rotacional média é de cerca de 34.64 rpm enquanto do INPE é de 34.61 rpm o programa proporcionou resultados inferiores que no caso do SCD1. Estes erros são plenamente compatíveis com a precisão requerida para a missão.

**Tabela 2** – Valores de W fornecidos pelo CCS, valores calculados (índice c) e os desvios encontrados para o SCD2.

DATA	W (rpm)	Winpe(rpm)	W-Winpe
01/02/2002	34.57	34.57	0.00
02/02/2002	34.59	34.56	0.03
03/02/2002	34.61	34.57	0.04
04/02/2002	34.63	34.60	0.03
05/02/2002	34.63	34.63	0.00
06/02/2002	34.62	34.66	-0.04
07/02/2002	34.62	34.67	-0.05
08/02/2002	34.61	34.68	-0.07
09/02/2002	34.61	34.68	-0.07
10/02/2002	34.60	34.67	-0.07
11/02/2002	34.60	34.66	-0.06

A solução analítica determinada pela teoria desenvolvida mostrou uma variação exponencial do módulo da velocidade de rotação do satélite, associada com o componente do torque magnético devido às correntes de Foucault no eixo do satélite Oz. Da comparação dos resultados da teoria desenvolvida com os dados fornecidos pelo CCS/INPE para os satélites de Coleta de Dados Brasileiros SCD1 e SCD2 mostram uma concordância melhor para o SCD1, sendo a média de erro de 0.00623 rpm para o SCD1 e 0.03 rpm para o SCD2.

A teoria poderia ser melhor avaliada se fosse considerado um intervalo maior de tempo de simulação e incluindo as variações da ascensão reta e declinação do eixo de rotação a cada período orbital.

### **Referências Bibliográficas**

- TOLEDO, F. A. Propagação Analítica da Velocidade de Rotação de Satélites Estabilizados por Rotação com Torque Induzido, Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, FEG, UNESP, Guaratinguetá, 2005.
- FRANÇA, L. V. G. Propagações Analíticas da Orientação Espacial de Satélites Estabilizados por Rotação com Torque Induzido, Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, FEG, UNESP, Guaratinguetá, 2006.
- KUGA, H. K.; SILVA, W. C. C.; GUEDES, U. T. V. Dinâmica de atitude para satélites estabilizados por rotação, Relatório Técnico do INPE, INPE-4403-NTE/275,1987.